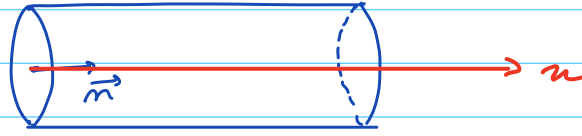


TDM2

SF1



$$1) Dm = \iint \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} v_0 \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r dr d\theta$$

$$= \rho 2\pi v_0 \int_0^R r dr = \rho 2\pi v_0 \left[\frac{1}{2} r^2 \right]_0^R = \rho \pi R^2 v_0$$

$$2) Dm = \rho \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \rho \int_{r=0}^{r=R} \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \vec{u}_r \cdot \vec{u}_r dr d\theta$$

$$= \rho 2\pi v_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{4R^2} \right]_0^R = \rho 2\pi v_0 \left(\frac{R^2}{2} - \frac{R^2}{4} \right) = \rho \pi v_0 \frac{R^2}{2}$$

Gym

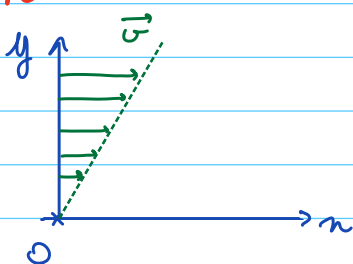
On sait que $D_v = v \times S$ avec v la vitesse d'écoulement
et S la section.

$$\text{Donc } S = \frac{D_v}{v} = \frac{330 \times 3600}{2000} = \underline{594 \text{ m}^2}$$

Si on note L la largeur de la semelle et h sa profondeur, on a

$$S = L \times h, \text{ donc } h = \frac{594}{165} = \underline{3,6 \text{ m}}$$

Gym



$$d\vec{F} = \eta \frac{\partial v_n}{\partial y} \bigg|_{y=0} \vec{u}_n$$

$$d\vec{F} = \eta k \vec{u}_n$$

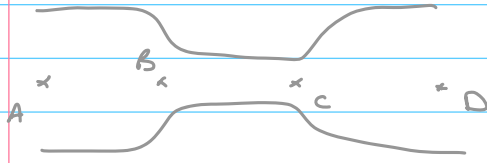
$$\text{Donc } \boxed{\vec{F} = \eta k S \vec{u}_n}$$

$$R_{\text{tot}} = R_H + R'_H + R_H = 2R_H + R'_H$$

On a donc

$$R_{\text{tot}} = 18 \times \frac{8\eta L}{\pi R_0^4}$$

"Par analogie" peut être un peu trop rapide, et selon tous les critères dont on a déjà parlé pour prendre cette décision, vous pouvez apporter une réponse plus détaillée:



$$R_H = \frac{P_B - P_A}{Q} = \frac{P_D - P_C}{Q}$$

$$R'_H = \frac{P_C - P_B}{Q}$$

$$\text{or } R_H = \frac{P_D - P_A}{Q} = \frac{P_D - P_C + P_C - P_B + P_B - P_A}{Q} = R_H + R'_H + R_H \quad (\checkmark)$$

6) On a, sans sténose $Q = \frac{P_D - P_A}{3R_H}$

et avec sténose $Q' = \frac{P_D - P_A}{18R_H} = \frac{Q}{6}$

$P_D - P_A$ est considéré le même avec et sans sténose car on veut comparer les débits à efforts du cœur constant.

La sténose réduit fortement le débit et donc l'apport d'oxygène aux organes. Pour compenser, le cœur devra fournir plus d'effort, à qui le fatigue.

7) Avec pontage, on aurait une résistance équivalente R_{eq} telle que

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_{\text{tot}}} + \frac{1}{R_{\text{pont}}}$$

avec R_{pont} la résistance du pontage.

$$R_{eq} = \frac{R_{\text{tot}} \times R_{\text{pont}}}{R_{\text{tot}} + R_{\text{pont}}} = \frac{18 \times \frac{8\eta L}{\pi R_0^4} \times \frac{8\eta \times 3L}{\pi R_2^4}}{18 \times \frac{8\eta L}{\pi R_0^4} + \frac{8\eta \times 3L}{\pi R_2^4}}$$

et on veut $R_{eq} = 3R_H$

$$\text{ie } \frac{18 \times \frac{8\eta L}{\pi R_0^4} \times \frac{8\eta \times 3L}{\pi R_2^4}}{18 \times \frac{8\eta L}{\pi R_0^4} + \frac{8\eta \times 3L}{\pi R_2^4}} = 3 \times \frac{8\eta L}{\pi R_0^4}$$

$$\frac{15}{R_2^4} = \frac{18}{R_0^4}$$

$$18 \times \frac{8\eta L}{\pi R_2^4} = 18 \times \frac{8\eta L}{\pi R_0^4} + \frac{8\eta L \times 3}{\pi R_2^4} \quad \text{ie } \frac{18}{R_2^4} = \frac{18}{R_0^4} + \frac{3}{R_2^4}$$

Enfin $\frac{R_2^4}{R_0^4} = \frac{15}{18}$ au final $R_2 = \sqrt[4]{\frac{15}{18}} R_0 = \underline{0.95 R_0}$

Exercice 3 - Écoulement sanguin

$$\begin{aligned}
 1) \text{ On a } D_v &= \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_{\alpha=0}^R \int_{\theta=0}^{2\pi} B \left(1 - \frac{\alpha^2}{R^2}\right) \vec{u}_z \cdot \vec{u}_z \frac{dS}{d\alpha d\theta} \\
 &= B 2\pi \int_0^R \left(1 - \frac{\alpha^2}{R^2}\right) \alpha d\alpha \\
 &= B 2\pi \left[\frac{1}{2} \alpha^2 - \frac{\alpha^4}{4R^2} \right]_0^R = B 2\pi \left(\frac{1}{2} R^2 - \frac{1}{4} R^2 \right)
 \end{aligned}$$

$$D_v = B \frac{\pi}{2} R^2$$

Donc $B = \frac{2D_v}{\pi R^2}$

2) Le fluide étant newtonien et visqueux, on a en $r=R$

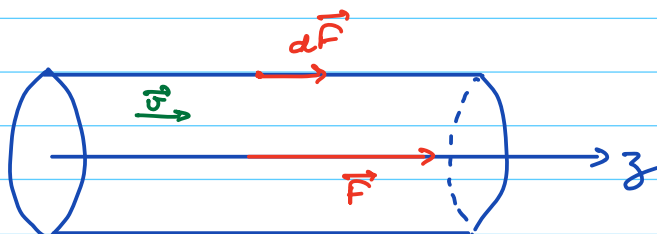
$$\begin{aligned}
 dF &= \eta \left| \frac{\partial v}{\partial r} \right|_{r=R} R d\theta dz \\
 &= \eta B \times 2 \frac{R}{R^2} \times R d\theta dz \\
 &= \eta B 2 d\theta dz
 \end{aligned}$$

$$\text{On a donc } F = \iint dF = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{z=0}^L 2\eta B d\theta dz = 2\eta B 2\pi L$$

$$\text{or } B = \frac{2D_v}{\pi R^2}$$

$$\text{Donc } F = 2\eta \times \frac{2D_v}{\pi R^2} \times 2\pi L = \underline{\underline{8\eta \frac{D_v}{R^2} L}}$$

3)



le fluide a une
tendance à entraîner
la paroi avec lui.

$$4) \text{ On a } P_e - P_s = \frac{F}{\pi R^2} = 8\eta \frac{Dv}{\pi R^4} L.$$

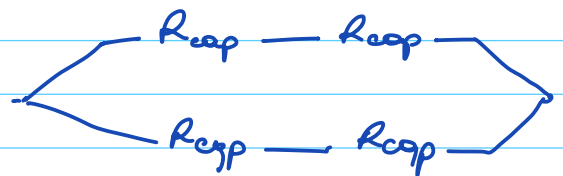
$$\text{et } P_e - P_s = R_h Dv$$

$$\text{D'où } R_h = 8\eta \frac{L}{\pi R^4}$$

$$5) R_{hAB} = \frac{\overbrace{P_A - P_B}^{Pa}}{\underbrace{DvA}_{m^3/s}} = \frac{4,0 \cdot 10^3 - 1,6 \cdot 10^3}{1,8 \cdot 10^{-3}} \times 60 = \underline{8,10^7 \text{ Pa} \cdot \text{s} \cdot \text{m}^{-3}}$$

6) Par analogie avec l'association de résistances électriques, on a

R_{eq1} la résistance équivalente à



$$\frac{1}{R_{eq1}} = \frac{1}{2R_{cap}} + \frac{1}{2R_{cap}} = \frac{1}{R_{cap}}$$

$$\text{c'est-à-dire } R_{eq1} = R_{cap}.$$

On a ensuite R_{eq1} en parallèle avec R_{eq1} $N_1/4$ fois

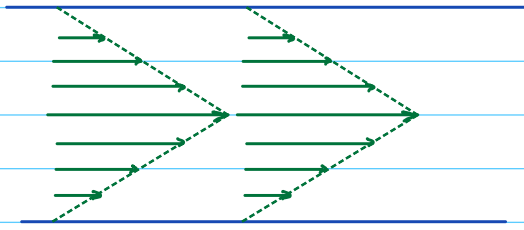
$$\text{Ainsi } \frac{1}{R_{hAB}} = \sum_1^{N_1/4} \frac{1}{R_{cap}} = \frac{N_1}{4} \frac{1}{R_{cap}}$$

$$R_{hAB} = \frac{4}{N_1} R_{cap}$$

$$\text{On a donc } N_1 = 4 \frac{R_{cap}}{R_{hAB}} = \underline{6 \cdot 10^4}$$

Exercice 4 - Ecoulement dans une conduite de section variable

1)



$$\begin{aligned} 2) \text{ On a } D_v &= \iint \vec{v} \cdot d\vec{S} \\ &= \iint v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) \vec{u}_z \cdot dr \, r \, d\theta \, \vec{u}_z \\ &= \int_0^{R_0} \int_0^{2\pi} v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) dr \, r \, d\theta \\ &= 2\pi v_0 \int_0^{R_0} \left(1 - \frac{r^2}{R_0^2}\right) dr \\ &= 2\pi v_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{r^3}{3R_0^2} \right]_0^{R_0} = 2\pi v_0 \left(\frac{R_0^2}{2} - \frac{R_0^2}{3} \right) \end{aligned}$$

$$D_v = \pi v_0 \frac{R_0^2}{3}$$

On a alors pour la vitesse débitante $U = \frac{D_v}{\pi R_0^2} = \frac{v_0}{3}$.

3) On a toujours conservation du débit massique:

à un z donné: $D_m = \int_0^{R(z)} \int_0^{2\pi} \mu(z) \vec{v} \cdot d\vec{S} = \int_0^{R(z)} \int_0^{2\pi} \mu(z) v_0 \left(1 - \frac{r^2}{R(z)^2}\right) dr \, r \, d\theta$

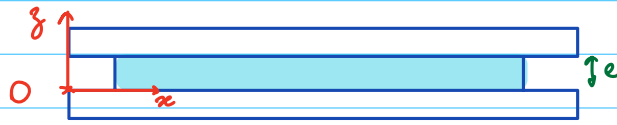
$$D_m = \mu(z) \pi v_0 \frac{R(z)^2}{3}$$

or D_m se conserve et vaut donc en particulier $D_m(z=0)$

$$D_m = \mu_0 \pi v_0 \frac{R_0^2}{3} = \mu(z) \pi v_0 \frac{R_0^2 (1 + \frac{z^2}{\ell^2})^2}{3}$$

$$\mu(z) = \frac{\mu_0}{(1 + \frac{z^2}{\ell^2})^2}$$

Exercice 5 - Lubrification



1) La vitesse aux points de contact est égale à celle de la plaque donc avec le paramétrage sur le schéma, on a :

$$\vec{v}(z=0) = \vec{0} \quad \text{or} \quad \vec{v}(z=e) = v_0 \vec{u}_x$$

2) On a $v = az + b$ si la vitesse est affine

$$\text{or } \begin{cases} v(0) = b = 0 \\ v(e) = ae + b = v_0 \Rightarrow a = \frac{v_0}{e} \end{cases}$$

Au final $\boxed{v(z) = \frac{v_0}{e} z}$

3) La force exercée par le fluide sur une surface élémentaire de la plaque supérieure est

$$d\vec{F} = -\eta \left| \frac{\partial v}{\partial z} \right|_{z=e} dS \vec{u}_x$$

Ainsi $\boxed{\vec{f}_s = -\eta \frac{v_0}{e} \vec{u}_x}$

car ici la paroi est en mouvement et la force de viscosité veut s'opposer à ce mouvement.

Exercice 6 - faut-il courir sous la pluie?

- 1) En avançant, la personne reçoit de l'eau seulement sur 2 surfaces:
- * la surface du haut
 - * la surface devant

les vitesses sont constantes et uniformes sur les surfaces où on va calculer les débits donc

$$D_m = \rho v L h + \rho U l L$$

En une durée Δt , on reçoit donc $m = \rho L (v h + U l) \Delta t$

$$\text{Or } \Delta t = \frac{d}{v}$$

$$\text{Donc } m = \rho L (v h + U l) \frac{d}{v} = \underline{\rho L d \left(h + \frac{U}{v} l \right)}$$

- 2) Pour minimiser m , il faut maximiser v , donc courir le plus vite possible!

Bonus: et si la pluie est "penchée" par le vent?

L, on peut montrer que si le vent est de face, la ccl^{re} est la même

MAIS si le vent est de dos, il faut courir à la même vitesse que la composante horizontale des gouttes

C'est + complexe si le vent est de travers.

Exercice 7 - Déplacement d'un piston à l'huile

$$1) Gp = \frac{P_2 - P_1}{h} = \frac{2P_1 - P_1}{h} = \frac{P_1}{h}$$

2) v_d est supposée uniforme dans l'interstice

$$\text{Donc } D_v = v_d \times \pi \left(\frac{D_2^2}{4} - \frac{D_1^2}{4} \right)$$

$$D_v = \alpha \frac{P_1 \pi (D_2^2 - D_1^2)}{4h\eta}$$

3) Considérons une surface élémentaire $dS = \frac{D_1}{2} d\theta dr$ du piston

Cette surface élémentaire subit une force $d\vec{F}_v$:

$$d\vec{F}_v = -\eta \left| \frac{\partial v_r}{\partial r} \right| \frac{D_1}{2} d\theta dr \vec{u}_r$$



d'interstice étant très étroit, on peut approximer

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} = \frac{v(r = \frac{D_2}{2}) - v(r = \frac{D_1}{2})}{\frac{D_2}{2} - \frac{D_1}{2}} \quad \text{avec } v \text{ la vitesse du fluide.}$$

$$v(r = \frac{D_1}{2}) = v_p \quad \text{avec } v_p \text{ la vitesse du piston}$$

$$v(r = \frac{D_2}{2}) = 0$$

car l'écoulement est visqueux.

$$\text{On a donc } d\vec{F}_v = -\eta \frac{2v_p}{D_2 - D_1} \frac{D_1}{2} d\theta dr \vec{u}_r$$

En intégrant sur toute la surface latérale du piston:

$$\vec{F}_v = - \int_{\theta=0}^{\theta=2\pi} \int_{r=0}^{r=h} \eta \frac{v_p D_1}{D_2 - D_1} d\theta dr \vec{u}_r$$

$$\vec{F}_v = -\eta 2\pi \frac{v_p D_1 h}{D_2 - D_1} \vec{u}_r$$

En ordre de grandeur, on aura $\sigma_p \approx \sigma_d$ (en réalité, $\sigma_d < \sigma_p$) car σ_d est une moyenne spatiale de $\sigma \in [0, \sigma_p]$ sur la colonne entre D_1 et D_2)

$$\text{On a alors } \underline{\vec{F}_v = -\eta \frac{2\pi \alpha P_1 D_1}{D_2 - D_1} \vec{u}_u}$$

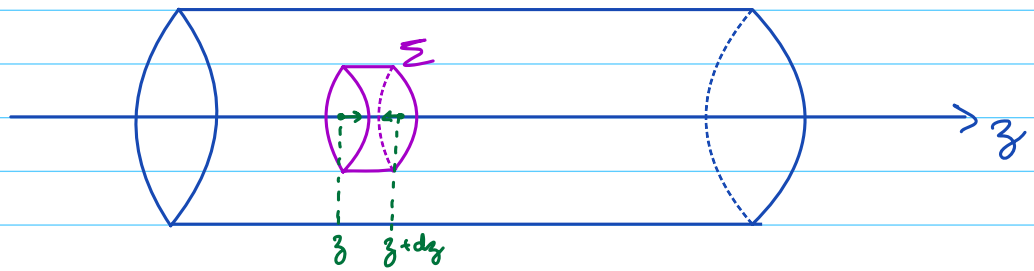
4) Le mouvement étant quasi statique, on peut considérer que les forces se compensent :

$$PFD/\vec{u}_u \quad 0 = P_1 \frac{D_1^2}{4} \pi - P_2 \frac{D_1^2}{2} \pi - \eta \frac{2\pi \alpha P_1 D_1}{D_2 - D_1} + F$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{- P_1 \frac{D_1^2}{4} \pi}$

$$\boxed{F = P_1 \frac{D_1^2}{4} \pi + \eta \frac{2\pi \alpha P_1 D_1}{D_2 - D_1}}$$

Exercice 8 - Démonstration du profil de Poiseuille



- 1) Par symétrie, on voit que seules les composantes de $d\vec{F}_p$ selon $\vec{u}_z$ sont non nulles.

On a donc $d\vec{F}_p = P(z) \pi r^2 \vec{u}_z - P(z+dz) \pi r^2 \vec{u}_z$

$$d\vec{F}_p = - \frac{dP}{dz} dz \pi r^2 \vec{u}_z$$

d et pas ∂ car P ne dépend que de z .

- 2) Sur la paroi latérale de Σ , on a $dS = 2\pi r dz$ (surface latérale d'un cylindre)

Donc $\|d\vec{F}_{visc}\| = \eta \left| \frac{dv_z}{dr} \right| 2\pi r dz$

La direction de $d\vec{F}_{visc}$ est celle de l'écoulement : $\vec{u}_z$.

Pour le sens, si z va plus vite que le fluide avec lequel il est en contact, alors $d\vec{F}_{visc}$ sera portée par $-\vec{u}_z$ et $\frac{dv_z}{dr} < 0$ (car v_z dans $\Sigma > v_z$ hors de Σ)
 Donc $v_z \downarrow$ qd $r \uparrow$

Si z va moins vite que le fluide avec lequel il est en contact, alors la force est portée par $+\vec{u}_z$ et $\frac{dv_z}{dr} > 0$

Ainsi, au final $d\vec{F}_{visc} = \eta \frac{dv_z}{dr} 2\pi r dz \vec{u}_z$

- 3) Σ est un système fermé. On peut lui appliquer le théorème de la résultante cinétique.

Il va à vitesse constante, donc

$$d\vec{F}_{visc} + d\vec{F}_p = \vec{0}$$

On a donc $\eta \frac{dv_z}{dr} 2\pi r dz \vec{u}_z - \frac{dP}{dz} dz \pi r^2 \vec{u}_z = \vec{0}$

$$\text{ie } \boxed{\frac{dv_z}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{dP}{dz}}$$

4) P ne dépend pas de z , l'autre $\frac{dP}{dz}$ est constant entier donc à montrer que

$\frac{dP}{dz}$ ne dépend pas de z .

$$\text{Calculons } \frac{d}{dz} \left(\frac{dP}{dz} \right) : \quad \frac{d}{dz} \left(\frac{dP}{dz} \right) = \frac{d}{dz} \left(\frac{2\eta}{r} \frac{dv_z}{dr} \right) \text{ or } v_z \text{ ne dépend pas de } z$$

$$= 0$$

Ainsi $\frac{dP}{dz}$ est constant et vaut $\frac{\Delta P}{L}$

$$5) \text{ On a } v(r=R) = 0$$

$$\text{et } \frac{dv}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{\Delta P}{L}$$

$$dv = \frac{\Delta P}{2\eta L} r dr$$

$$\int_0^{v(r)} dv = \frac{\Delta P}{2\eta L} \int_R^r r dr$$

$$v(r) = \frac{\Delta P}{2\eta L} \frac{1}{2} (r^2 - R^2) = \underline{\underline{\frac{\Delta P}{4\eta L} (r^2 - R^2)}}$$